Wir wollen den zweiten Satz (und dabei implizit auch den ersten) in drei Schritten beweisen. In einem ersten Schritt zeigen wir zunächst, dass der folgende Hilfssatz gilt:

Hilfssatz:
Sei Y eine Zufallsgröße, die nur nichtnegative Werte annimmt und sei $k \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

$$P(Y \geq k) \leq \frac{E(Y)}{k}$$

Diesen Satz beweisen wir anhand der Definition des Erwartungswerts und anhand von zwei Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\cdot P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\cdot P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ Y(\omega)<k}} Y(\omega)\cdot P(\{\omega\}) + \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ Y(\omega)\geq k}} Y(\omega)\cdot P(\{\omega\}) \\
&\geq \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ Y(\omega)\geq k}} Y(\omega)\cdot P(\{\omega\}) \\
&\quad \text{(Aufteilen der Summe durch den Wert } k \text{ und Betrachten nur der zweite Summe)} \\
&\geq k\cdot \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ Y(\omega)\geq k}} P(\{\omega\}) = k\cdot P(Y\geq k)
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt setzen wir $Y = (X-E(X))^2$, wobei X eine weitere beliebige Zufallsgröße sei und $k = (\varepsilon\cdot n)^2$, $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}$. Es gilt nun mit Ausnutzen der Definition der Varianz sowie des Hilfssatzes:

$$P(Y\geq(\varepsilon\cdot n)^2) = P\left((X-E(X))^2 \geq (\varepsilon\cdot n)^2\right) \leq \frac{E\left((X-E(X))^2\right)}{(\varepsilon\cdot n)^2} = \frac{V(X)}{(\varepsilon\cdot n)^2}$$

Da $(X-E(X))^2 \geq (\varepsilon\cdot n)^2$ äquivalent zu $|X-E(X)| \geq (\varepsilon\cdot n)$ und ebenso $|\frac{X}{n}-\frac{E(X)}{n}| = |\frac{X}{n}-p| \geq (\varepsilon)$ ist (die Ungleichungen haben die gleiche Lösungsmenge), gilt schließlich folgende Ungleichung, die **Tschebycheff-Ungleichung**:

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon\cdot n) = P(|\frac{X}{n}-p|\geq\varepsilon) \leq \frac{V(X)}{(\varepsilon\cdot n)^2}$$

Die Tschebycheff-Ungleichung ermöglicht eine hier nicht weiter betrachtete Abschätzung der Abweichungen für Werte einer Zufallsgröße vom Erwartungswert dieser Zufallsgröße, wenn es sich um eine *beliebige* Zufallsgröße X handelt. Daher wollen wir in einem dritten Schritt allein *binomialverteilte* Zufallsgrößen betrachten und erhalten:

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon\cdot n) = P(|\frac{X}{n}-p|\geq\varepsilon) \leq \frac{n\cdot p\cdot(1-p)}{(\varepsilon\cdot n)^2} = \frac{p\cdot(1-p)}{\varepsilon^2\cdot n}$$

Für $n\to\infty$ geht der Term auf der rechten Seite der Ungleichung gegen 0, womit der Satz bewiesen ist.