

Wir betrachten diese Erkenntnis, die auch als \sqrt{n} -Gesetz bezeichnet wird, aus einer anderen Perspektive bezogen auf den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße X . Erhöht man die Größe der Stichprobe n , so ist die Wahrscheinlichkeit einer festgelegten prozentualen Abweichung $\tilde{\varepsilon} > 0$ vom Erwartungswert geringer als bei kleineren Stichproben. Da für binomialverteilte Zufallsgrößen X gilt: $E(X) = n \cdot p$, können wir die prozentuale Abweichung auch durch $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \cdot p$ und damit in Abhängigkeit von n formulieren, also eine Abweichung von $\varepsilon \cdot n$ vom Erwartungswert betrachten.

Beispiel:

Gegeben seien wieder die Würfe eines Würfels im Beispiel oben. Unterscheiden wir die Wurfanzahl (die Größe der Stichprobe) durch einen Index, so ergibt sich in dem Beispiel $E_{12}(X) = 2$; $E_{120}(X) = 20$ und $E_{1200}(X) = 200$.

Wir betrachten nun das Ereignis, dass die Abweichung vom Erwartungswert größer als 50% des Erwartungswerts selbst beträgt ($\tilde{\varepsilon} = 0,5$), also die Zufallsgröße einen Wert außerhalb des Intervalls $[E(X) - 0,5 \cdot E(X); E(X) + 0,5 \cdot E(X)]$ annimmt. Bezogen auf den Umfang der Stichprobe n , wird also eine Abweichung größer als $\varepsilon = 0,5 \cdot p = 0,5 \cdot \frac{1}{6} = 1/12 \approx 0,083 = 8,3\%$ des Stichprobenumfangs vom Erwartungswert bzw. ein Wert außerhalb des Intervalls $[E(X) - \varepsilon \cdot n; E(X) + \varepsilon \cdot n]$ betrachtet. Es ergibt sich für die Stichprobenumfänge des Würfelbeispiels:

n	Intervall	Wahrscheinlichkeit	Gegenwahrscheinlichkeit
12	[1; 3]	$P(1 \leq X \leq 3) \approx 0,493$	$\approx 0,507$
120	[10; 30]	$P(10 \leq X \leq 30) \approx 0,986$	$\approx 0,014$
1200	[100; 300]	$P(100 \leq X \leq 300) \approx 1$	≈ 0

Während also bei einer geringen Stichprobengröße von $n = 12$ eine Abweichung von mehr als $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$ des Stichprobenumfangs (mehr als 50% des Erwartungswerts) noch recht wahrscheinlich ist, ist diese bei einer Stichprobengröße von $n = 1200$ nahezu 0.

Erweitert man diese Erkenntnis auf beliebige prozentuale Abweichungen $\varepsilon \cdot n$ vom Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße, so ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit dieser prozentualen Abweichung vom Erwartungswert gegen 0 geht, wenn man den Stichprobenumfang nur hinreichend (und theoretisch unbeschränkt) erhöht.

Beispiel:

Wir betrachten wiederum die binomialverteilte Zufallsgröße X : Anzahl der Sechsen bei n Wiederholungen des Würfelwurfs und geben diesmal mit $\varepsilon = 0,001$ eine prozentuale Abweichung von n vor und betrachten wiederum das symmetrische Intervall um den Erwartungswert $[E(X) - \varepsilon \cdot n; E(X) + \varepsilon \cdot n]$. Nun erhöhen wir den Stichprobenumfang n immer um den Faktor 10 und berechnen die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Wert der Zufallsgröße X *außerhalb* des genannten Intervalls angenommen wird $1 - P(E(X) - \varepsilon \cdot n \leq X \leq E(X) + \varepsilon \cdot n)$. Wir erhalten etwa beginnend bei $n = 600$: